

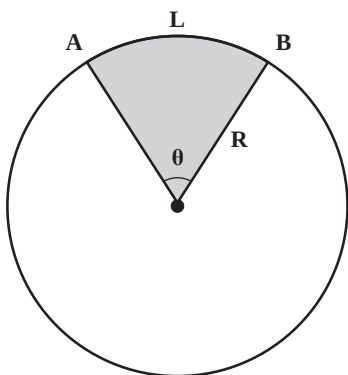


عباس قلعه پوراقدم
کارشناس ارشد جبر
دبیر ریاضی، ارومیه

بحثی در باب حجم مخروط

کلیدواژه‌ها: مخروط، حجم، قطاع، رادیان

می‌دانید که حجم یک مخروط با شعاع قاعده r و ارتفاع h از رابطه زیر به دست می‌آید:

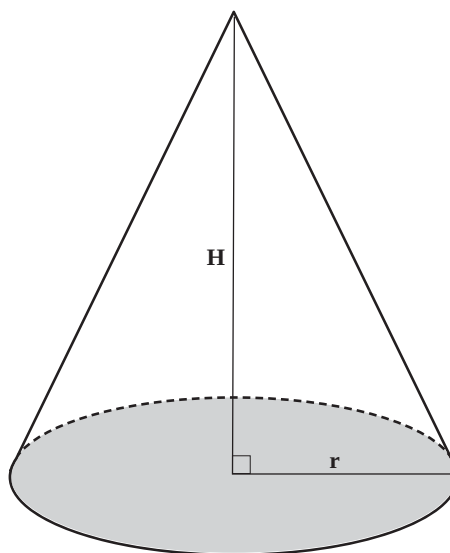


شکل ۲.

برای محاسبه حجم مخروط ساخته شده به شعاع قاعده و ارتفاع آن نیاز داریم که به ترتیب آن‌ها را به دست می‌آوریم.

شعاع قاعده مخروط

در شکل ۲ کمان AB روبه‌روی زاویه مرکزی θ با طول L را در نظر می‌گیریم. این کمان محیط قاعده مخروط را تشکیل خواهد داد. برای محاسبه L برحسب θ و نیز به منظور یادآوری، تعریف رادیان را می‌آوریم. **رادیان:** هرگاه طول کمان روبه‌روی یک زاویه مرکزی، برابر شعاع دایره باشد، اندازه این زاویه مرکزی یک رادیان است. چون محیط دایره 2π برابر شعاع دایره است، پس محیط دایره 2π رادیان خواهد بود که در آن π با دقت ده رقم اعشار برابر است با: 3.1415926535 .



شکل ۱.

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad (1)$$

حال فرض کنیم از یک تکه مقوای مدور به شعاع R ، با بریدن قطاعی که اندازه زاویه مرکزی آن θ رادیان است، مخروطی بسازیم (شکل ۲). می‌خواهیم حجم مخروط ساخته شده را به صورت تابعی از θ محاسبه کنیم.

اگر در دایره‌ای به شعاع R ، اندازه یک زاویه مرکزی، θ رادیان باشد، طول کمان روبه‌روی این زاویه (L) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$L = \frac{2\pi R\theta}{2\pi} \Rightarrow L = R\theta \quad (2)$$

از طرف دیگر، اگر شعاع قاعده مخروط ساخته شده را r فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$L = 2\pi r \quad (3)$$

از روابط (۲) و (۳) می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

$$r = \frac{R\theta}{2\pi} \quad (4)$$

$\frac{\pi}{4}$ رادیان را که از دایره‌ای به شعاع 10 سانتی‌متر بریده شده است، حساب کنید. (π را $3/14$ در نظر بگیرید).

حل:

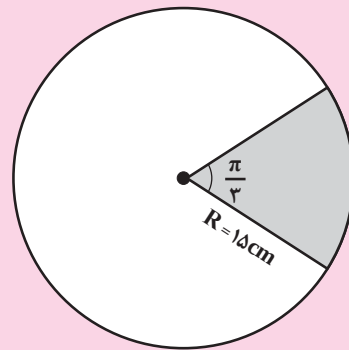
$$\theta = \frac{3/14}{2} = 1/57 \text{ رادیان}$$

$$V = \frac{R^2 \theta^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 - \theta^2}$$

$$\Rightarrow V = \frac{(10)^2 (1/57)^2}{24(3/14)^2} \sqrt{4(3/14)^2 - (1/57)^2}$$

$$\Rightarrow V \approx 67/3 \text{ cm}^3$$

تمرین: حجم مخروط ساخته شده از قطاع مشخص شده در شکل ۴ را حساب کنید.



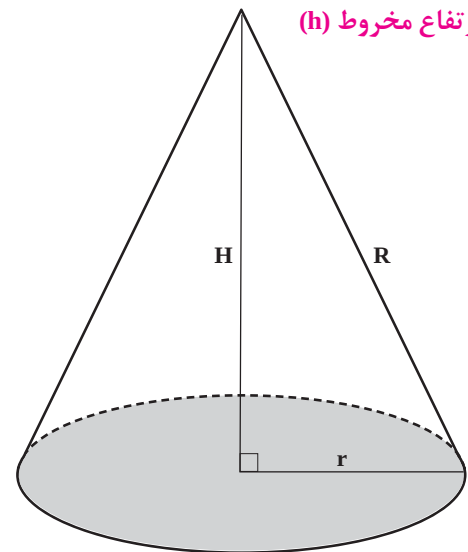
شکل ۴

پاسخ: $100/16 \text{ cm}^3$

*منبع:

Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem, vol 34, n1, (feb 2008).

ارتفاع مخروط (h)



شکل ۳

رابطه فیثاغورس را در شکل ۳ به کار می‌گیریم:

$$R^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow h^2 = R^2 - r^2 \Rightarrow h = \sqrt{R^2 - r^2} \quad (5)$$

با کمی استفاده از دانسته‌های جبری خود، از روابط (۴) و (۵) نتیجه زیر را بگیرید:

$$h = \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - \theta^2} \quad (6)$$

و سرانجام می‌توانید از روابط (۱)، (۴) و (۶) به نتیجه نهایی برسید:

$$V = \frac{R^2 \theta^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 - \theta^2}$$

مسئله نمونه

حجم مخروط ساخته شده از قطاعی با زاویه مرکزی

پرسش‌های بیکارجو!

چند جفت صحیح (x, y) در رابطه $6(x! + 3) = y^2 + 5$ صدق می‌کنند؟

الف) ☐ ۰

ب) ☐ ۲

ج) ☐ ۴

د) ☐ ۶

ه) ☐ ۸